书名：材料力学

ISBN：978-7-313-16469-8

作者：岳桂杰　魏伟

出版社：上海交通大学出版社

定价：42.00元

前言

随着高等教育的发展,根据学校类型和学生情况,对材料力学课程提出不同层次的要求,为满足中等学时及少学时材料力学课程的需要,我们在多年教学实践的基础上,参考了近年出版的多部教材,编写了本书。

本书对传统的材料力学课程内容的章节结构做了调整,力求理论严谨、逻辑清晰,叙述由浅入深,适当简化推导。本教材的特点:

(1)突出材料力学的任务,以强度、刚度、稳定性和疲劳设计为主线进行编写,打破了原材料力学中按杆件基本变形小循环的课程体系。

(2)坚持少而精的原则,简化理论推导,强化工程应用。

(3)注重基本知识和基本理论的阐述,内容通俗易懂、深入浅出、循序渐进,书中的例题、习题等都注意了与工程实际的联系,并考虑对学生基本技能的训练,以满足高等学校对应用型人才的需要。

(4)书中的例题绝大多数为精选的典型题目,旨在使读者掌握材料力学问题的分析方法和解题技巧。每章后均附有思考题和习题,以便使读者得到较为全面的训练,提高分析和解决实际问题的能力,并为学习后续课程打下基础。

限于作者水平,且编写时间仓促,书中存在的疏漏、不妥之处,恳请读者批评指正。

目 录

CONTENTS

第一章 绪论 …… 1

◎ 第一节 材料力学的任务 …… 1
◎ 第二节 变形固体的基本假设 …… 2
◎ 第三节 杆件变形的基本形式 …… 3
◎ 第四节 内力、截面法和应力的概念 …… 4

第二章 杆件基本变形时的内力分析 …… 9

◎ 第一节 轴向拉伸(压缩)杆横截面的内力分析 …… 9
◎ 第二节 扭转圆轴横截面的内力分析 …… 12
◎ 第三节 平面弯曲梁横截面的内力分析 …… 17
◎ 第四节 平面弯曲梁的内力图——剪力图和弯矩图 …… 21

第三章 杆件基本变形时的应力分析 …… 34

◎ 第一节 轴向拉伸(压缩)杆横截面与斜截面的应力分析 …… 34
◎ 第二节 扭转圆轴横截面的应力分析 …… 40
◎ 第三节 平面弯曲梁横截面的正应力分析 …… 49
◎ 第四节 平面弯曲梁横截面的切应力分析 …… 57

第四章 应力状态理论 …… 68

◎ 第一节 应力状态概述 …… 68
◎ 第二节 二向应力状态分析——解析法 …… 70
◎ 第三节 二向应力状态分析——图解法 …… 75
◎ 第四节 三向应力状态分析 …… 79
◎ 第五节 广义胡克定律 …… 81

第五章 材料的失效分析及强度设计准则 …… 89

◎ 第一节 常用工程材料在轴向拉伸与压缩时的力学性能 …… 89

◎ 第二节 强度失效判据与设计准则 …… 94
◎ 第三节 强度失效判据与设计准则的应用 …… 97

第六章 杆件的静力强度设计 …… 104

◎ 第一节 杆件轴向拉伸(压缩)时的强度设计 …… 104
◎ 第二节 圆轴扭转时的强度设计 …… 107
◎ 第三节 梁平面弯曲时的强度设计 …… 111
◎ 第四节 联接件的强度设计 …… 115
◎ 第五节 组合变形时的强度设计 …… 120

第七章 杆件的刚度设计 …… 136

◎ 第一节 圆轴扭转时的刚度设计 …… 136
◎ 第二节 梁平面弯曲时的刚度设计 …… 138
◎ 第三节 简单超静定问题的求解 …… 146
◎ 第四节 提高杆件强度和刚度的措施 …… 151

第八章 压杆稳定性设计 …… 157

◎ 第一节 压杆稳定的概念 …… 158
◎ 第二节 细长压杆的临界载荷 …… 160
◎ 第三节 欧拉公式及经验公式 …… 166
◎ 第四节 压杆稳定条件 …… 170
◎ 第五节 提高压杆稳定性的措施 …… 172

第九章 疲劳失效与抗疲劳设计 …… 175

◎ 第一节 交变应力、疲劳失效及其特性 …… 175
◎ 第二节 疲劳极限与 σ-斜曲线 …… 177
◎ 第三节 影响疲劳极限的因素 …… 179
◎ 第四节 提高构件疲劳强度的措施 …… 182
◎ 第五节 抗疲劳设计的基本概念 …… 184

附 录 附录 A 截面的几何性质 …… 189

◎ 第一节 截面的面积矩和形心位置 …… 189
◎ 第二节 面积的惯性矩、惯性积和惯性半径 …… 191
◎ 第三节 惯性矩的平行移轴公式 …… 195

附 录 附录 B 型钢表 …… 199

参考答案 …… 211
参考文献 …… 216

第一章　绪　论

第一节　材料力学的任务

在工程实践中，各种机械设备和工程结构得到广泛应用。组成机械设备的零件或部件，统称为**构件**。

当机械设备和结构正常工作时，组成它们的各个构件都要受到相邻构件或其他物体对它的作用，也就是都要受到外力的作用，其尺寸与形状也发生改变。构件尺寸和形状的变化称为**变形**。

当结构或机械承受载荷时，各构件都必须能正常地工作，这样才能保证整个结构或机械的正常工作。为此，首先必须要求构件在受载荷作用时不仅不发生破坏，也不能发生过大变形。在多数情况下，构件发生过大变形或发生破坏，整个结构或机械就无法正常工作。例如，如果齿轮轴的变形过大（见图 1－1），轮齿相互间就不能正常啮合。

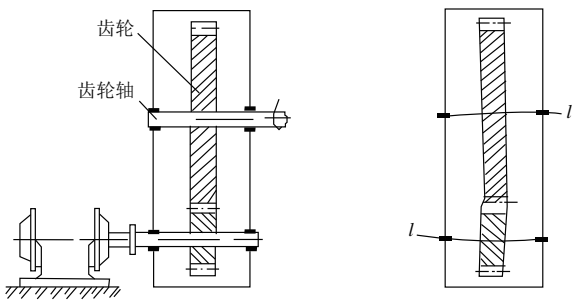


图 1－1

实践中还发现，有些构件在载荷作用下，将发生不能保持其原有平衡状态的现象。例如对于受压的细长杆（见图 1－2），当压力超过一定限度时杆就不能保持原有的直线形状，而突然从原来的直线形状变成弯曲形状。这种现象称为丧失稳定或简称失稳。

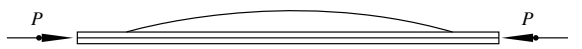


图 1－2

针对上述三种情况，组成结构或机械的每一构件要想能正常地工作必须同时满足以下三个方面的要求：

（1）构件要具备足够的**强度**（即构件抵抗破坏的能力），以保证在规定的使用条件下不发生破坏。

（2）构件要具备足够的**刚度**（即构件抵抗变形的能力），以保证在规定的使用条件下不发生过大的变形。

（3）构件要具备足够的**稳定性**（即构件保持其原有平衡状态的能力），以保证在规定的使用条件下不发生失稳现象。

工程技术人员在设计构件时，不但要满足上述强度、刚度和稳定性这三方面的要求，

工程技术人员在设计构件时，不但要满足上述强度、刚度和稳定性这三方面的要求，以保证构件安全工作。同时还必须尽可能合理选用材料和降低材料消耗量，以符合经济原则。显然过分地强调安全会造成浪费，而片面地追求经济也会使设计不安全。这两者之间是存在矛盾的。材料力学的任务就在于力求合理地解决这种矛盾。

综上所述，材料力学的主要任务是：研究构件在外力作用下的变形、破坏规律，为合理设计构件而提供有关强度、刚度和稳定性的基本理论、计算方法和试验技术，以达到安全和经济的要求。

第二节　变形固体的基本假设

制作构件所使用的材料多种多样，其组成与微观结构则更是复杂。为了便于进行强度、刚度与稳定性的理论分析，一般根据工程材料的主要性质对其作如下假设。

一、连续性假设

假设在构件所占有的空间内毫无空隙地充满了物质，即认为是密实的。构件中的一些力学量（如各点的位移），可用坐标的连续函数表示，并可采用无限小的数学分析方法。至于空隙或缺陷的影响不能忽略的情况，将在后面有关章节中专门讨论。

应该指出，连续性假设不仅适用于构件变形前，也适用于变形后，即构件内变形前相邻近的质点变形后仍保持邻近，既不产生新的空隙或孔洞，也不出现重叠现象。

二、均匀性假设

认为在固体内任何部分的力学性能都完全相同。实际上，就使用最广泛的金属而言，组成金属的各晶粒的力学性能并不是完全相同。但因为构件或构件的任一部分都包含为数极多的晶粒，而且晶粒处于无规则排列。固体的力学性能是各晶粒的力学性能的统计平均值，因此可以认为固体各部分的力学性能是均匀的。物体的力学性能可用固体内任一部位切取的微单元体来研究。

三、各向同性假设

材料在外力作用下所表现的性能，称为力学性能或机械性能。材料力学认为无论沿任何方向，固体的力学性能都是相同的。但对于实际材料，其基本组成部分的力学性能往往存在不同程度的差异。例如，金属是由微小的晶粒所组成，各个晶粒的力学性能不完全相同，晶粒交界处的晶界物质与晶粒本身的力学性能也不相同。但是，由于构件的尺寸远大于其组成部分的尺寸（例如 $1\ mm^3$ 的钢材中包含了数万甚至数十万个晶粒），因此，按照统计学的观点，仍可将材料看成是均匀的，即认为材料的性能与其在构件中的位置无关。因此，从构件内部任何部位所切取的微小单元体都具有与构件完全相同的性质。同样，通过试件所测得的材料性能，也可用于构件内的任何部位。

沿不同方向力学性能不同的材料，称为各向异性材料，如木材、胶合板和某些人工合成材料等。

除以上三个基本假设外，本书中所研究的问题，限于变形的大小远小于构件的本身的

尺寸，同时构件各点处与变形相应的位移也是很微小的。由于构件的变形很小，这样在为构件建立静力平衡方程时可以不考虑变形和变形相对应的位移，而采用构件原始尺寸和外力作用点的原始位置，对变形的这一限制，称为**小变形条件**。小变形假设条件下引起的误差很微小，而可以使实际计算却大为简化。

试验结果表明，如外力不超过一定限度，绝大多数材料在外力作用下发生变形，在外力撤除后可恢复原状。但如果外力超过一定限度时，则外力撤除后一部分变形能够恢复，而有一部分变形不能消失。随着外力撤除而消失的变形称为**弹性变形**；外力撤除后不能消失的变形称为**塑性变形**。

第三节　杆件变形的基本形式

杆件受力不同，杆件变形形式不同。杆件变形的形式可以归纳为如下四种基本形式：

一、拉伸或压缩

当杆件受沿轴线方向的载荷作用时，杆件会沿杆件轴线方向伸长或缩短，这种变形称为**轴向拉伸或压缩**，如图 1－3 所示。

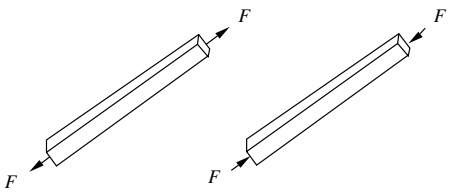


图 1－3

二、剪切

当杆件受垂直于杆件轴线方向的外载荷作用时，杆件的横截面之间产生沿载荷方向的相互错动，这种变形称为**剪切变形**。最简单的剪切变形如图 1－4 所示。

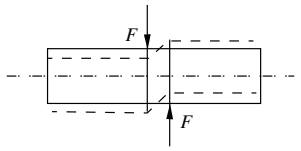


图 1－4

三、扭转

当杆件受到与杆件轴线垂直的力偶作用时，杆件各横截面将围绕轴线旋转一定的角度，这种变形称为**扭转**，如图 1－5 所示。

四、弯曲

当杆件受到与杆件轴线垂直的力或作用面位于杆件的纵向平面内的力偶作用时，杆件的轴线将变为曲线，这种变形称为**弯曲变形**，如图 1－6 所示。

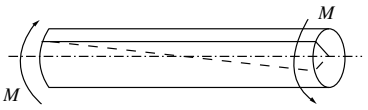
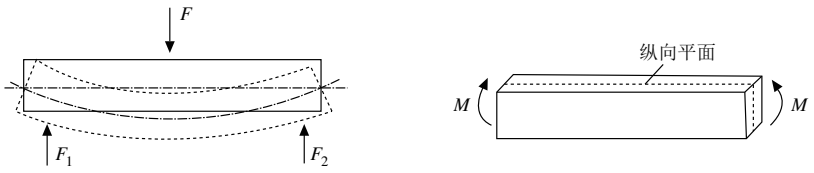


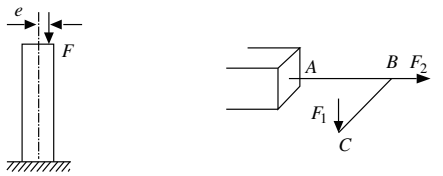
图 1－5



(a)　　(b)

图 1－6

还有一些杆件可能同时发生以上几种基本变形中的两种以上，这种变形称为**组合变形。**例如车床主轴工作时同时发生弯曲、扭转和压缩三种基本变形；又如，受偏心压缩的立柱，柱体将产生压缩与弯曲的组合变形，如图 1－7（a）所示；如图 1－7（b）所示曲拐，受载荷 F_1 和 F_2 作用时，曲拐中杆件 AB 将产生拉伸、扭转和弯曲的组合变形。



(a) 柱体的偏心压缩　　(b) 受不同方向载荷作用的曲拐

图 1－7

第四节　内力、截面法和应力的概念

一、内力与截面法

受力构件内部相邻两部分之间的相互作用力就是**内力。**我们知道，构件即使不受外力作用，物体的各质点之间依然存在着相互作用的力。材料力学中的内力，是指构件在外力作用下，上述相互作用力的改变量，所以是物体内部各部分之间因外力而引起的附加相互作用力，即“附加内力”。求解构件内力的基本方法是**截面法。**

图 1－8（a）表示一杆件在外力 P_1，P_2，…，P_n 作用下处于平衡状态。在一个处于平衡状态的构件内，其各部分也一定是平衡的。为了求杆件内由外力作用引起的某一指定截面 $m-m$ 上的内力，假想沿截面 $m-m$ 将杆件截分为 A、B 两部分，任取一部分［如 A 部分，见图 1－8（b）］作为研究对象，则 A 部分在外力和内力（即 B 部分对 A 部分的作用力）的作用下保持平衡。由连续性假设可知，截面 $m-m$ 上的作用力是一个空间连续分布力系。将该力系向截面形心 C 简化，一般会得到一个空间力和一个空间力偶，将它们沿坐标轴分解，得到如图 1－8（c）所示的六个内力分量，即轴力 N，剪力 Q_z、Q_y，扭矩 M_x，弯矩 M_y、M_z。

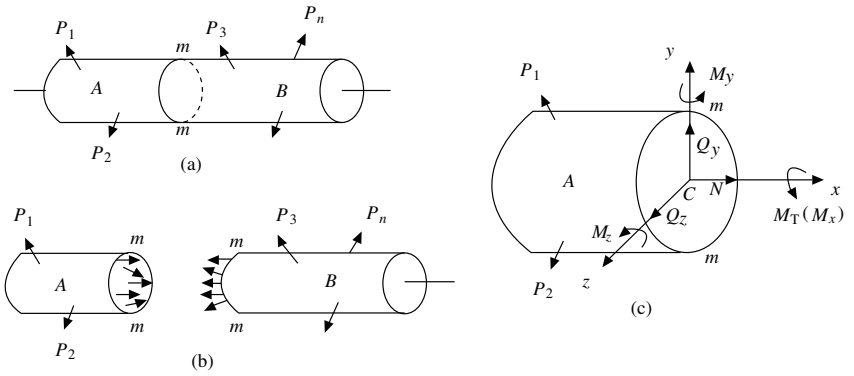


图 1－8

杆件在截面 $m-m$ 上的六个内力，可根据任意部分的平衡条件确定，即用平衡方程由已知外力求得截面上的内力（即六个内力分量）。

上述求解内力的方法称为**截面法**，可将其归纳如下：沿着所求内力的截面，假想将杆件分成两部分；取任意一部分为研究对象，并画出另一部分对该部分的作用力；根据所研究部分的平衡条件，由已知外力确定未知的内力。

【例 1－1】如图 1－9（a）所示，已知等直杆在轴向力 P_1、P_2、P_3 作用下处于平衡状态。试用截面法计算横截面 $m-m$ 上的内力。

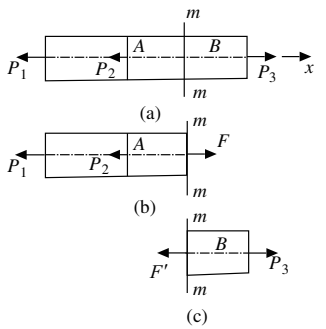


图 1－9

解：用截面法将杆件分为两部分。选择 A 部分为研究对象，如图 1－9（b）所示，可得

$$\sum F_x=0,\ F-P_1-P_2=0,\ \text{即}\ F=P_1+P_2$$

也可取 B 部分为研究对象，如图 1－9（c）所示，可得

$$\sum F_x=0,\ P_3-F'=0,\ \text{即}\ F'=P_3=P_1+P_2$$

二、应力

用截面法求得的内力或内力分量反映的是截面上分布力系的总量。为了描述截面上的内力分布情况，需引入应力的概念。应力是作用在截面的单位面积上的内力。

分析受力构件某一截面上任一点 K 处的应力，可围绕 K 点取一微面积 ΔA，如图 1－10（a）所示，设 ΔA 上作用的内力为 ΔP，则 ΔA 上的平均应力 $\overline{p}$ 可表示为：

$$\overline{p}=\frac{\Delta P}{\Delta A}$$

令 ΔA 趋于零，即得到 K 点的应力为

$$p=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta A} \tag{1-1}$$

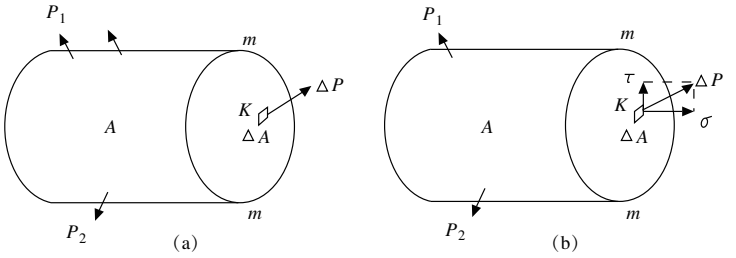


图 1-10

K 点的应力 p 是一个矢量。一般情况下，它既不垂直于截面也不与截面相切。为分析方便，常将 p 分解为垂直于截面的分量 σ 和与截面相切的分量 τ，如图 1-10（b）所示。σ 称为**正应力**，τ 称为**剪应力**或**切应力**，而 p 称为**全应力**。

在国际单位制中，应力的单位是 N/m^2（牛顿/米^2），称为帕斯卡或简称帕，其符号为 Pa。在工程中通常使用兆帕，其符号为 MPa，1 MPa＝10^6 Pa＝10^6 N/m^2＝1 N/mm^2。有时还使用吉帕，其符号为 GPa，1 GPa＝10^9 Pa。

思考题

（1）在计算构件内力时，能否应用静力学公理将力系简化？

（2）使用截面法求解截面内力的步骤是什么？

（3）何谓构件的强度、刚度和稳定性？

（4）研究构件的承载能力，对变形固体的基本假设是什么？

（5）下列结论中_____是正确的。

A. 材料力学的任务是研究各种材料的力学问题

B. 材料力学的任务是在保证安全的原则下设计构件或零件

C. 材料力学的任务是在力求经济的原则下设计构件或零件

D. 材料力学的任务是在既安全又经济的原则下为设计构件或零件提供分析计算的基本理论和方法

（6）下列结论中正确的是_____。

A. 构件的强度表示构件抵抗破坏破坏的能力

B. 构件的刚度表示构件抵抗变形的能力

C. 构件的稳定性表示构件维持其原有平衡状态的能力

D. 构件的强度、刚度和稳定性愈高愈好

（7）材料力学中的内力是指 _____ 。

A. 物体内部的力

B. 物体内部各质点间的相互作用力

C. 由外力作用引起的各质点间相互作用力的改变量

D. 由外力作用引起的某一截面两侧各质点间相互作用力的合力

（8）为保证机械和工程结构的正常工作，其中各构件一般应满足_____、_____和_____三方面的要求。

（9）截面上任一点处的全应力一般可分解为_____方向和_____方向的分量。前者称为该点的_____，用_____表示；后者称为该点的_____，用_____表示。

习题

（1）如图 1－11 所示钻床，试求 $n-n$ 截面上的内力。

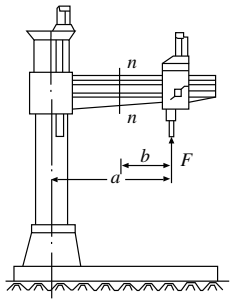


图 1－11

（2）求如图 1－12 所示杆件 1－1、2－2 截面上的内力。

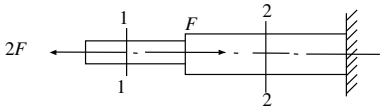


图 1－12

（3）如图 1－13 所示，折杆受 P 力作用，求 1－1、2－2 截面上的内力。

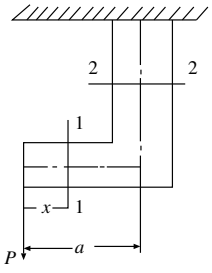


图 1－13

（4）如图 1－14 所示，试求杆件 1－1、2－2、3－3 各截面上的内力。

（5）如图 1－15 所示，构架在 B 端受竖直力 P 作用。求：

①AB 杆的截面 1－1、2－2 上的内力；

②CD 杆截面 3－3 的内力；

③AE 杆截面 4－4 的内力。

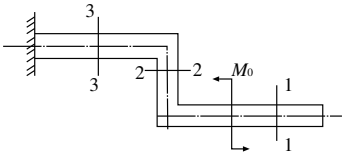


图 1－14

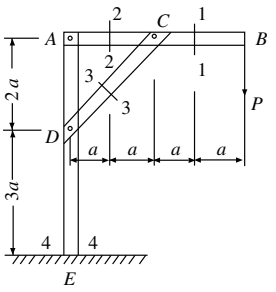


图 1－15

（6）如图 1－16 所示圆弧形杆，在力 P 及 H 的作用下，求：1－1、2－2、3－3、4－4 各截面上的内力。

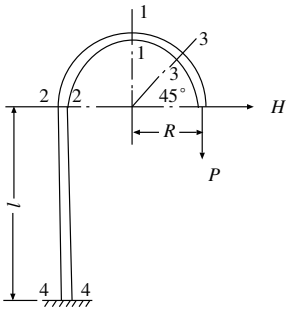


图 1－16

（7）如图 1－17 所示，求杆件横截面 $m-m$ 或 $n-n$ 上的内力。

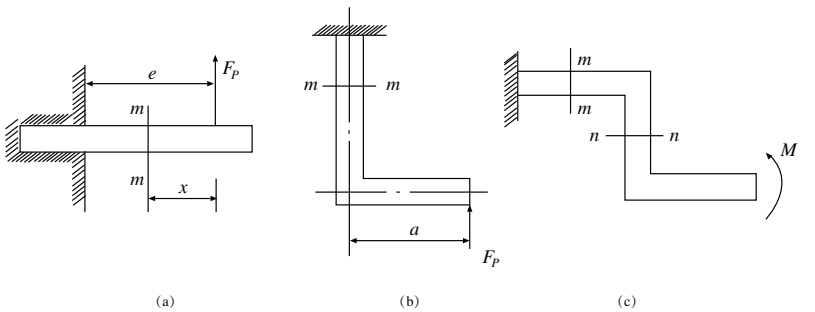


图 1－17

第二章　杆件基本变形时的内力分析

杆件在载荷作用下发生变形，在截面上同时产生内力。本章所研究的杆件基本变形时的内力分析，是强度、刚度分析的重要基础。

第一节　轴向拉伸（压缩）杆横截面的内力分析

一、轴向拉伸与压缩概念

在工程结构中，受外力作用而产生轴向拉伸或压缩变形的构件是很多的。例如，起重机械装置中受拉的钢索和受压的撑杆［见图 2－1（a）］，内燃机中受到压缩的连杆［见图 2－1（b）］，又如拉床中的拉杆，紧固件中的螺栓等。这些拉压杆虽然形状各异，且受力方式也不同，但它们所具有的共同特点是：外力的合力作用线与杆件轴线重合，杆件只沿轴线方向伸长或缩短。因此，对于以轴向伸长或缩短为主要特征的变形形式，即称为**轴向拉伸或轴向压缩。**

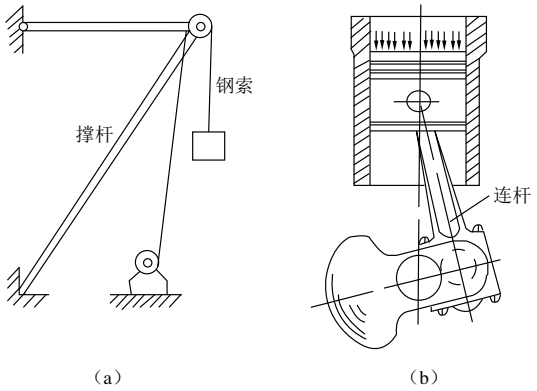


图 2－1

二、轴向拉伸与压缩的内力

为了求解轴向拉伸或压缩杆件的内力，采用截面法。以横截面 $m-m$ 将一拉伸杆件切为左、右两部分［见图 2－2（a）］。在这左、右两段分离的横截面上，即有使杆件产生轴向变形的内力分量——轴力 F_N［见图 2－2（b）或（c）］，现以左段为研究对象，列平衡方程 $\sum F_x=0$，即 $F_N-F=0$，得 $F_N=F$。

由此可以看出，杆件轴力的确定方法完全与静力分析的方法相同，而且在建立平衡方程时无须考虑杆件的变形形式。但这里将轴力分为拉力和压力，并规定：使杆件产生伸长变形的拉力为正，其方向与横截面外法线方向一致［见图 2－3（a）］；使杆件产生缩短变

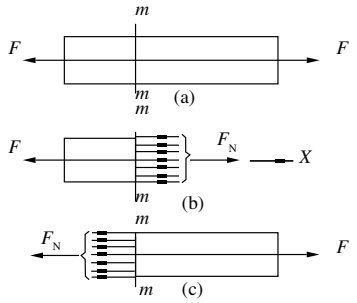


图 2－2

形的压力为负，其方向与横截面外法线方向相反［见图 2－3（b）］。在计算时，通常都是首先假设轴力为正，然后只需由计算结果的正负号，即确定轴力是拉力还是压力。轴力的法定计量单位为 N（牛或牛顿）或 kN（千牛或千牛顿）。

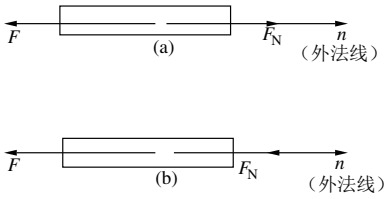


图 2－3

当杆件作用有沿轴线方向的多个外力时，在杆件外力作用的不同段的横截面上，其轴力是不相同的，而杆件轴力沿轴线变化的情况可用**轴力图**来表示。下面举例说明轴力图的画法。

【例 2－1】如图 2－4（a）所示等截面直杆，已知 $F_1=10$ kN，$F_2=20$ kN，$F_3=35$ kN，$F_4=25$ kN。试画出杆件的轴力图。

解：（1）计算杆件各段的轴力。

以外力 F_1、F_2、F_3、F_4 作用的截面为分界点，将杆件分为 AB、BC、CD 三段。在 AB 段，用 1－1 截面将杆件截为两段，取左段为研究对象，右段对截面的作用力用 F_{N1} 来代替，并设 F_{N1} 为正［见图 2－4（b）］，由平衡方程

$$\sum F_x=0,\quad F_{N1}-F_1=0$$

得

$$F_{N1}=F_1=10\ \text{kN}$$

在 BC 段，用 2－2 截面将杆件截为两段，取左段为研究对象，右段对左段的作用力用 F_{N2} 来代替，并设 F_{N2} 为正［见图 2－4（c）］，由平衡方程

$$\sum F_x=0,\quad F_{N2}+F_2-F_1=0$$

得

$$F_{N2}=F_1-F_2=(10-20)\ \text{kN}=-10\ \text{kN}$$

在 CD 段，用 3－3 截面将杆件截为两段，取右段为研究对象，左段对右段的作用力用 F_{N3} 来代替，并设 F_{N3} 为正［见图 2－4（d）］，由平衡方程

$$\sum F_x=0,\quad F_4-F_{N3}=0$$

得

$$F_{N3}=F_4=25\ \text{kN}$$

（2）画轴力图［见图 2－4（e）］。

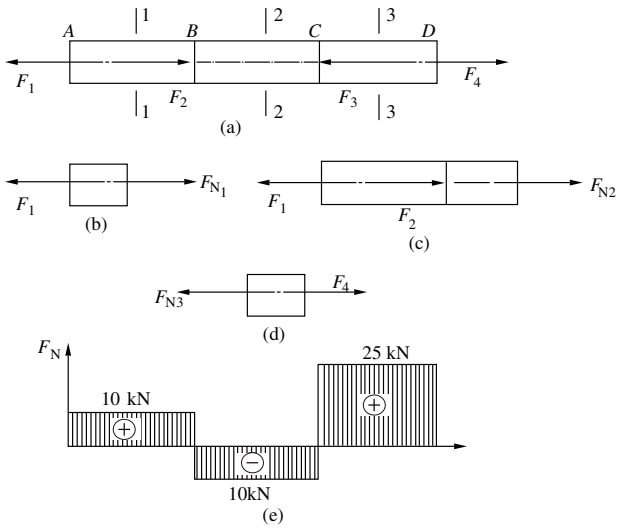


图 2－4

综上所述，可得如下结论：

①轴力的大小等于截面一侧（左或右）所有外力的代数和。外力与截面外法线方向相反者取正号，反之取负号。

②轴力得正值时，轴力的方向与截面外法线方向相同（离开截面），杆件受拉伸；轴力得负值时，轴力方向与截面外法线方向相反（指向截面），杆件受压缩。

为了表明各截面上的轴力沿轴线变化的情况可按选定的比例尺，用平行于杆轴线的坐标表示横截面的位置，再取垂直的坐标表示横截面上的轴力，这样绘出的图线，称为**轴力图**。图 2－4（e）即为如图 2－4（a）所示杆件的轴力图。

【例 2－2】试绘制如图 2－5（a）所示杆件的轴力图。

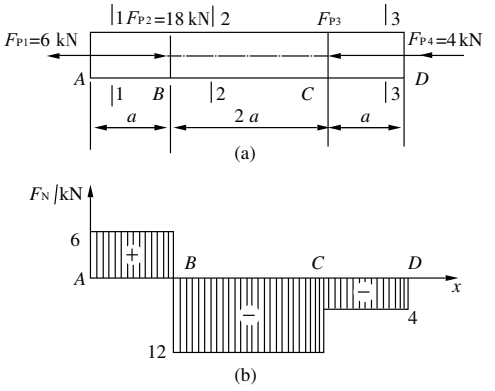


图 2－5

解：若杆上有未知的外力，应根据杆件的外力平衡条件先求出未知外力。

由 $\sum F_x=0$，得

$$F_{P3}=-F_{P1}+F_{P2}-F_{P4}=8\ \text{kN}$$

由杆件的外力使用简捷法写出各杆段的轴力为

AB 段：$F_{N1}=F_{P1}=6\ \text{kN}$

BC 段：$F_{N2}=F_{P1}-F_{P2}=-12$ kN

CD 段：$F_{N3}=-F_{P4}=-4$ kN

建立 F_N-x 坐标系，标出力的单位，按选定的比例尺，根据轴力方程，在杆件的正下方绘出轴力图 2-5（b）所示。可见最大轴力发生在 BC 段，$|F_N|_{max}=12$ kN。

【例 2-3】图 2-6（a）所示截面积为 A，高为 l 的等截面立柱，顶端受一集中力 F 的作用，材料的重度为 γ。绘出立柱的轴力图。

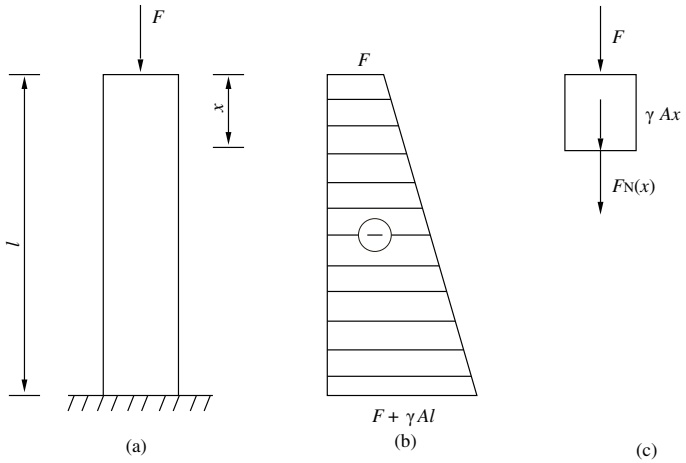


图 2-6

解：(1) 计算距顶端为 x 的截面的轴力。

将立柱从 x 截面处截为两段，取上段为研究对象，受力如图 2-6（c）所示。该段所受的外力有 F 和该段自重 γAx。由平衡方程 $\sum F_x=0$ 得

$$F+\gamma Ax+F_N(x)=0$$

$$F_N(x)=-F-\gamma Ax \quad (0<x<l)$$

(2) 画轴力图。

轴力沿截面高度按线性规律变化，其轴力图如图 2-6（b）所示。

第二节　扭转圆轴横截面的内力分析

一、扭转的概念

图 2-7（a）驾驶盘轴，在轮盘边缘作用一对方向相反的切向力 F 构成一力偶，其力偶矩为 $M=F\cdot D$，式中，D 为力偶臂。根据平衡条件可知，在轴的下端，必存在一反作用力偶，其矩 $M'=M$。在上述力偶作用下，轴的变形如图 2-7（b）所示。

又如，图 2-8（a）所示传动轴，在其两端垂直于杆件轴线的平面内，作用一对大小相等、方向相反的力偶。在上述力偶作用下，传动轴产生图 2-8（b）所示的变形。

可以看出，这些构件的共同特点是：构件为直杆，并在垂直于杆件轴线的平面内作用有力偶。在这种情况下，杆件各横截面绕轴线作相对旋转如图 2-9 所示。以横截面绕轴线作相对旋转为主要特征的变形形式，称为**扭转**，使杆产生扭转变形的外力偶，称为**扭力偶**，

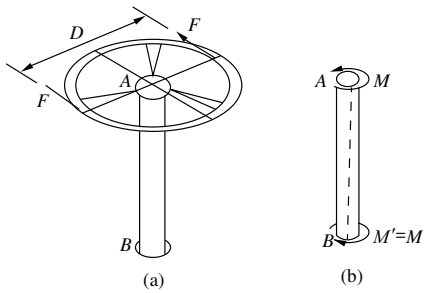


图 2－7

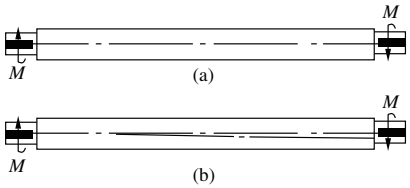


图 2－8

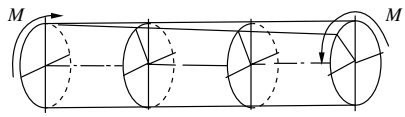


图 2－9

其矩称为**扭力偶矩**。凡是以扭转为主要变形的杆件称为**轴**，轴的变形以横截面间绕轴线的相对角位移即**扭转角**表示。

工程中最常见的轴为圆截面轴，它们为实心或空心。本章主要研究圆截面轴的扭转的内力计算。

二、外力偶矩的计算

在工程实践中，经常使用到的轴类构件发生扭转变形的外力偶矩往往并不直接给出，而是只知道轴所传递的功率和转速，这时就要通过换算来求得轴发生扭转的外力偶矩。下面结合如图 2－10 所示传动轴进行分析。

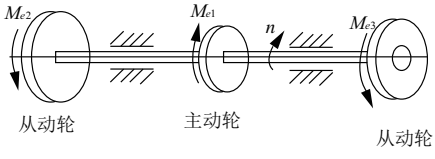


图 2－10

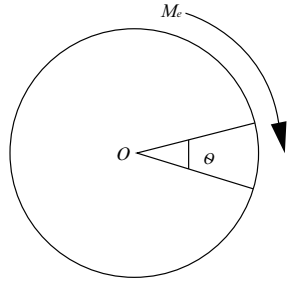


图 2－11

如图 2－10 所示传动轴，其转速为 n（r/min），轴传递的功率由主动轮传到轴上，再通过从动轮分配出去。设通过某一轮所传递的功率为 P（kW），则作用在此轴上的外力偶矩 M_e 可按如下方法求得。

P 的功率相当于每分钟做功

$$W=1000\times P\times 60 \tag{2-1}$$

这里功的单位为 N·m，它应与作用在轮上的外力偶在每分钟内所作的功相等。由于外力偶所做功等于其矩 M_e 与轮的转角 θ（见图 2－11）的乘积，即 $M_e\cdot\theta$，因此，外力偶

每分钟所做功应为

$$W=\frac{M_e\theta}{t}=M_e\omega=2\pi nM_e\ (\mathrm{N\cdot m}) \tag{2-2}$$

式（2-1）、式（2-2）两式所表达的功是相同的，因此

$$M_e=\frac{60\times1000P}{2\pi n}\ (\mathrm{N\cdot m}) \tag{2-3}$$

或

$$M_e=9549\frac{P}{n}\ (\mathrm{N\cdot m}) \tag{2-4}$$

式中，P 的单位为 kW。

工程计算中有时采用公制单位马力，由于 1 kW=1.36PS，1PS=0.735 5 kW，

故有

$$M_e=7024\frac{P}{n}\ (\mathrm{N\cdot m}) \tag{2-5}$$

式中，P 的单位为 PS。

应用式（2-3）、式（2-4）或式（2-5），可以很方便地计算出作用在轴上的外力偶矩。

在确定外力偶的转向时，应注意到主动轮上的外力偶的转向与轴的转向方向相同，而从动轮上的外力偶的转向则与轴的转动方向相反；这是因为从动轮上的外力偶是阻力，例如图 2-10 所示传动轴中，外力偶 M_{e1} 的转向与轴的转动方向相同，而外力偶矩 M_{e2} 和 M_{e3} 的转动则与轴的转动方向相反。

三、扭矩与扭矩图

圆轴扭转时的内力计算仍然采用截面法。如图 2-12（a）所示受扭圆轴，假想将轴沿欲求内力的截面 C 截为两段，由于轴原来处于平衡，则其任一段也处于平衡。任取一段为研究对象，根据力偶只能与力偶平衡，C 截面上的内力系必须合成为一个力偶才能与外力偶 M_A 平衡。横截面上的内力偶矩 T 称为轴的**扭矩**。若取左段为研究对象［见图 2-12（b）］，由平衡方程 $\sum M_x=0$ 得

$$T-M_A=0 \quad T=M_A$$

若取右段为研究对象，求得的同一截面的扭矩大小相等，转向相反［见图 2-12（c）］。

为使取左、右两段轴求得的同一截面的扭矩符号相同，通常用右手定则确定扭矩的正负号：用右手四指沿扭矩的转向握着轴，大拇指的指向（扭矩的矢量方向）背离截面时，扭矩为正；相反，扭矩为负，如图 2-13 所示。

【例 2-4】传动轴如图 2-14（a）所示，主动轮 A 输入功率 $P_A=36$ kW，从动轮 B、C、D 输出功率分别为 $P_B=P_C=11$ kW，$P_D=14$ kW，轴的转速 $n=300$ r/min。试绘制轴的扭矩图。

解：（1）计算外力偶矩。

由式（2-2）可知，作用于轴的各外力偶矩分别为

$$M_{eA}=9549\frac{P_A}{n}=1146\ \mathrm{N\cdot m}$$

$$M_{eB}=M_{eC}=9549\frac{P_B}{n}=350\ \mathrm{N\cdot m}$$

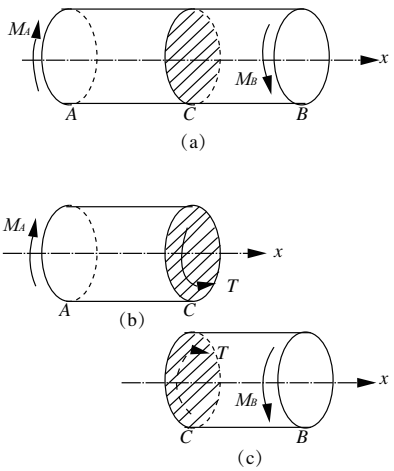


图 2－12

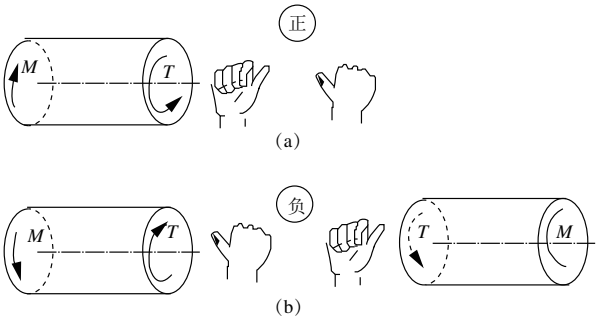


图 2－13

$$M_{eD}=9549\frac{P_D}{n}=446\ \text{N}\cdot\text{m}$$

（2）计算扭矩。

分别在 BC、CA、AD 各段中取任意截面 1－1，2－2，3－3［见图 2－14（a）］，假设扭矩均为正［图 2－14（b）、（c）、（d）］。应用截面法，由平衡方程 $\sum M_x=0$，可得各段的扭矩为：

BC 段［图 2－14（b）］：$T_1=-M_{eB}=-350\ \text{N}\cdot\text{m}$

CA 段［图 2－14（c）］：$T_2=-M_{eC}-M_{eB}=-700\ \text{N}\cdot\text{m}$

AD 段［图 2－14（d）］：$T_3=M_{eD}=446\ \text{N}\cdot\text{m}$

计算结果中 T_1 和 T_2 的负号表示扭矩的实际转向与图中假设的转向相反。

（3）绘制扭矩图。

建立 $T-x$ 坐标系，三段轴的扭矩均为常数，选定比例尺，将各段的扭矩值标在 $T-x$ 坐标系中，如图 2－14（e）所示的扭矩图。由图可以看出，最大扭矩值发生在 CA 段，$|T|_{\max}=700\ \text{N}\cdot\text{m}$。

在本例中，如果互换主动轮 A 和从动轮 C 的位置，各段的扭矩会发生什么变化？从受力的角度，哪一种布置比较合理？请自行分析。

截面法是计算圆轴扭矩的基本方法，将平衡方程 $\sum M_x=0$ 移项后可得计算扭矩的**简**

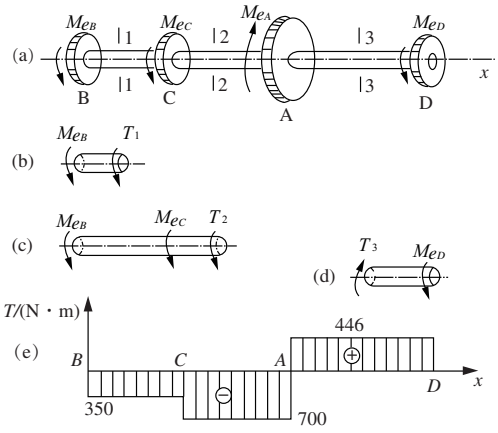


图 2-14

捷法：轴任一截面的扭矩等于该截面一侧（左侧或右侧）轴段上所有外力偶矩的代数和。其中，凡矢量方向背离截面的外力偶矩产生负的扭矩，相反则产生正的扭矩。

【例 2-5】传动轴如图 2-15（a）所示。已知主动轮 A 输入功率为 $P_A=120$ kW，从动轮 B、C、D 输出功率分别为 $P_B=30$ kW，$P_C=40$ kW，$P_D=50$ kW。轴的转速为 $n=300$ r/min。试画出该轴的扭矩图。

解：按式（2-2）计算出作用于各轮上外力偶的力偶矩大小为

$$M_A=9549\frac{P_A}{n}=3820\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_B=9549\frac{P_B}{n}=960\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_C=9549\frac{P_C}{n}=1270\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_D=9549\frac{P_D}{n}=1590\ \text{N}\cdot\text{m}$$

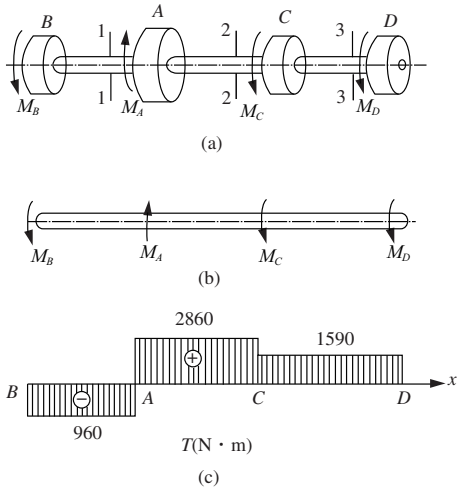


图 2-15

（2）用简捷法计算扭矩。

$$T_1 = -M_B = -960\ \text{N} \cdot \text{m}$$

$$T_2 = M_A - M_B = 2860\ \text{N} \cdot \text{m}$$

$$T_3 = M_D = 1590\ \text{N} \cdot \text{m}$$

（3）画扭矩图。

根据所得数据，把各截面上的扭矩沿轴线变化的情况用图 2－15（c）表示出来，即为该轴的扭矩图。从图中看出，最大扭矩发生在 AC 段内，其值为

$$|T|_{\max} = 2\ 860\ \text{N} \cdot \text{m}$$

第三节　平面弯曲梁横截面的内力分析

一、平面弯曲的概念

在工程中，经常遇到弯曲变形的构件：如图 2－16（a）、（b）所示的机床齿轮轴和车床切刀；如图 2－16（c）所示的桥梁结构中的主梁；如图 2－16（d）所示的火车的轮轴等，都是弯曲变形的实例。这类直杆的受力及变形特征是：作用于杆上的外力垂直于杆的轴线，原来为直线的轴线变形后为曲线。以弯曲变形为主的构件称为**梁**。垂直于杆轴的荷载，称为**横向荷载**。

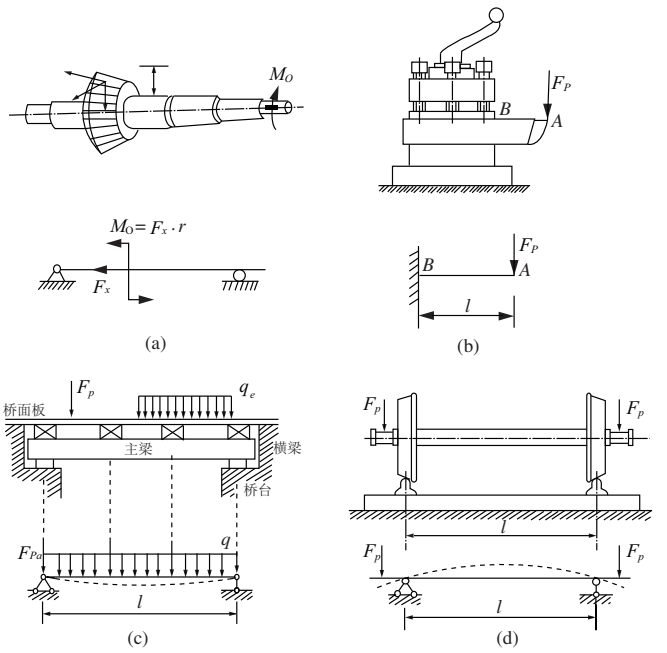


图 2－16

工程中常见的梁，其横截面一般都有一根对称轴［见图 2－16（d）］。由各横截面对称轴组成的纵向平面称为梁的纵向对称面（见图 2－17）。当梁上所有的外力（包括荷载和支座约束力）均作用在梁的纵向对称面内时，则弯曲变形后，梁的轴线变成一条位于纵向对称面内的平面曲线，这种弯曲变形称为**对称弯曲**。对称弯曲是最常见和最基本的弯曲变形，属于平面弯曲。平面弯曲是杆件的基本变形形式之一。本节讨论对称弯曲时梁横截面上的内力。

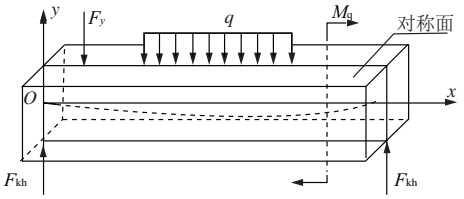


图 2－17

在对梁进行分析计算时，通常以轴线代表梁，并将梁的载荷和支座作一些简化，即得出梁的计算简图。图 2－16（a）、（b）、（c）、（d）分别为对应梁的计算简图。

而对于梁的支座的简化，通常将其简化成固定铰链、活动铰链和固定端三种形式。在图 2－16（a）中，因为轮轴左端的推力轴承限制轴沿轴线方向移动，故将其简化成固定铰链支座，而右端的径向轴承不限制轴沿轴线方向的移动，故将其简化成活动铰链支座。类似地，也可把各种轴的滑动轴承都简化成铰支座。在图 2－16（b）中，车床刀架限制切刀一端不能移动也不能转动，而另一端自由，故将其简化成固定端。

根据梁支座的简化形式和铰链支座对梁的支承特点，通常将一端为固定铰链支座，另一端为活动铰链支座所支承的梁称为**简支梁**，如图 2－16（c）所示；若简支梁的一端或两端伸出支座之外，则称为**外伸梁**，如图 2－16（a）、（d）所示；而如图 2－16（b）所示的车床切刀，因一端固定，而另一端自由，称这种梁为**悬臂梁。**

简支梁或外伸梁的两个铰支座间的距离称为梁的**跨度**，悬臂梁的跨度则是固定端到自由端的距离。

二、剪力和弯矩

当作用在梁上的全部外力（荷载和支座约束力）确定后，梁任意横截面上的内力可通过截面法求得。

在对称弯曲情况下，梁的横截面上一般有两个内力分量：**剪力 F_s** 和**弯矩 M**。剪力和弯距分别引起剪切与弯曲变形。

以如图 2－18（a）所示的简支梁为例，分析距支座 A 为 a 的横截面 $m-m$ 上的内力。应用截面法，在 $m-m$ 截面处将梁截开，任选其中一部分作为研究对象，如图 2－18（b）、（c）所示。设 $m-m$ 截面的形心为 O，则由平衡方程 $\sum F_y=0$ 及 $\sum M_o=0$，可得 $m-m$ 截面上的剪力和弯矩分别为：

$$F_S=F_{RA}$$

$$M=F_{RA}a$$

为了使从左、右梁段分离体求出的同一截面上的剪力和弯矩不但大小相等，而且正负号也一致，对剪力和弯矩的正负号规则规定如下。

剪力：当截面上的剪力使所考虑的梁段有顺时针转动趋势者为正，反之为负，如图 2－19（a）所示。

弯矩：当截面上的弯矩使所考虑的梁段在截面处产生向下凸的弯曲变形（即下侧受拉、上侧受压）者为正，反之为负，如图 2－19（b）所示。

综上可知，梁横截面上的内力称为剪力和弯矩，求指定截面内的基本方法仍是截面法。利用截面法求内力的主要步骤是：

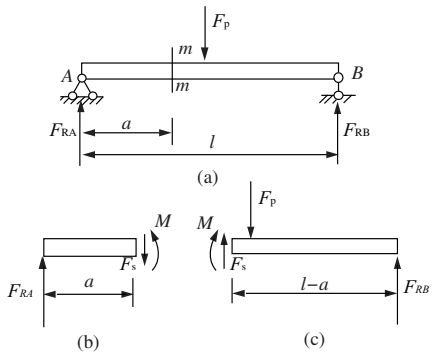


图 2－18

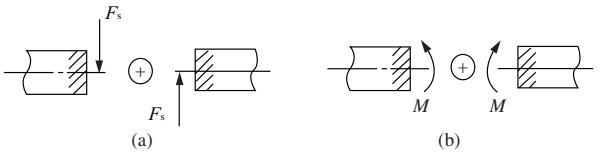


图 2－19

（1）沿欲求内力的截面将梁切开；

（2）取分离体并画出分离体的受力图；

（3）由静力平衡条件求内力。

【例 2－6】如图 2－20 所示，简支梁受满跨均布荷载 q 和集中力 P 的作用，求跨中截面（C 截面）的剪力和弯矩。已知 l＝3 m。

解：（1）求支座反力。

选全梁为研究对象，建立平衡方程［见图 2－20（a）］

$$\sum M_A=0：R_B l-\frac{Pl}{3}-\frac{ql^2}{2}=0$$

得

$$R_B=4\ \text{kN}$$

$$\sum F_y=0：R_A+R_B-P-ql=0$$

得

$$R_A=5\ \text{kN}$$

（2）求跨中 C 截面的剪力和弯矩。

假想将梁沿 C 截面切开，以左段梁为分离体，并假设 C 截面的剪力和弯矩均为正，如图 2－20（b）所示。建立分离体的平衡方程。

$$\sum F_y=0：F_S+P+\frac{ql}{2}-R_A=0$$

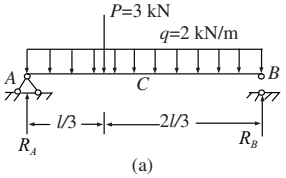
得

$$F_S=R_A-P-\frac{ql}{2}=-1\ \text{kN}$$

求得剪力为负表明 F_S 的真实方向与图中假设方向相反。以上是取左段梁为分离体计算内力的。读者可以验证，如取右段梁为分离体，计算结果完全相同。

$$\sum mc=0：（以\ c\ 截面形心为矩心）$$

$$M+P\cdot\frac{1}{6}+\frac{q}{2}\ (\frac{l}{2})^2-R_A\cdot\frac{l}{2}=0$$



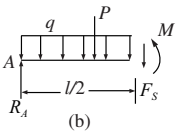


图 2－20

得 $$M=R_A\cdot\frac{l}{2}-P\cdot\frac{l}{6}-\frac{q}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2=3.75\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

从上例计算结果，可以得出如下结论：

（1）横截面上的剪力等于该截面以左梁段（或以右梁段）上所有竖向外力的代数和。截面以左梁段上向上的外力（或以右梁段上向下的外力）引起正值剪力；反之，引起负值剪力。

（2）横截面上的弯矩等于该截面以左梁段或以右梁段上所有外力（包括外力偶）对该截面形心之矩的代数和。向上（向下）的外力引起正值弯矩（负值弯矩）。截面以左梁段上顺时针转向的外力偶（以右梁段上逆时针转向的外力偶）引起正值弯矩；反之，引起负值弯矩。

利用上述结论计算梁指定截面内力的方法称简捷法。用简捷法计算内力可以直接根据梁上的外力写出内力表达式，计算较为简便。下面举例说明。

【例 2－7】一简支梁受集中力 $P=1\ 000$ N、集中力偶 $m=4$ kN·m 和均布载荷 $q=10$ kN/m 的作用（见图 2－21），试求 1－1 和 2－2 截面上的剪力和弯矩。

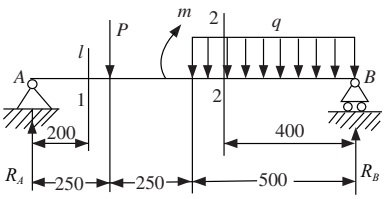


图 2－21

解：（1）求支座反力。

由 $$\sum m_B=0\qquad P\times750-R_A\times1000-m+10^4\times0.5\times250=0$$

得 $$R_A=-2000\ \text{N}$$

由 $$\sum F_y=0\qquad R_A-P-500q+R_B=0$$

得 $$R_B=8000\ \text{N}$$

（2）用简捷法计算 1－1，2－2 截面上的剪力和弯矩。

由左侧外力计算（假想用纸片将梁右侧盖上）

$$F_{s1}=R_A=-2000\ \text{N}$$

$$M_1 = R_A \times 200 = -400\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$F_{s2} = R_A - P - q \times 0.1 = -4000\ \text{N}$$

$$M_2 = R_A \times 0.6 - P \times 0.35 + m - q \times 0.1 \times 0.05 = 2400\ \text{N}\cdot\text{m}$$

此题也可以通过右侧外力计算（假想用纸片将梁左侧盖上）

$$F_{S1} = -R_B + q \times 0.5 + P = -2000\ \text{N}$$

$$M_1 = R_B \times 0.8 - q \times 0.5 \times 0.55 - m + P \times 0.05 = -400\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$F_{S2} = q \times 0.4 - R_B = -4000\ \text{N}$$

$$M_2 = R_B \times 0.4 - q \times 0.4 \times 0.2 = 2400\ \text{N}\cdot\text{m}$$

两侧计算结果完全相同，但 F_{s1}、M_1 由左侧计算较简便，F_{s2}、M_2 由右侧计算较方便。

第四节　平面弯曲梁的内力图—剪力图和弯矩图

在一般情形下，梁横截面上的剪力和弯矩随横截面位置的变化而变化。现以坐标 x 表示横截面在梁轴线上的位置，于是梁横截面上的剪力和弯矩都可表示为坐标 x 的函数，即

$$F_s = F_s(x),\quad M = M(x)$$

以上函数表达式分别称为**剪力方程**和**弯矩方程**。根据梁的剪力方程和弯矩方程，以横坐标 x 表示横截面的位置，纵坐标 F_s 和 M 表示相应横截面上的剪力和弯矩，由此画出的表示剪力和弯矩随横截面位置变化的图线分别称为**剪力图**和**弯矩图**。现举例说明剪力图和弯矩图的画法。

【例 2-8】如图 2-22（a）所示简支梁，在截面 C 处承受集中载荷 F 的作用。试建立梁的剪力与弯矩方程，并画剪力图与弯矩图。

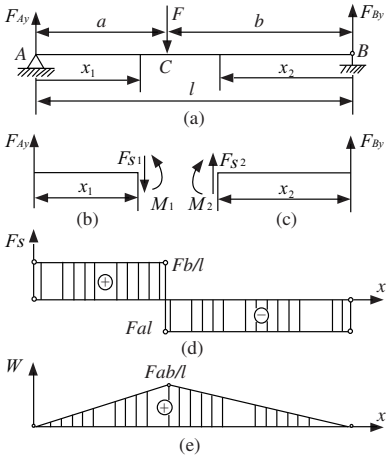


图 2-22

解：（1）计算支座反力。

由平衡方程 $\sum M_B = 0$ 与 $\sum M_A = 0$ 得 A 与 B 端的支座反力分别为

$$F_{Ay} = \frac{bF}{l},\quad F_{By} = \frac{aF}{l}$$

（2）建立剪力与弯矩方程。

由于在截面 C 处作用有集中载荷 F，故应以该截面为分界面，将梁划分为 AC 与 CB

两段，分段建立剪力与弯矩方程。

对于 AC 段，以 A 点为原点，并用坐标 x_1 表示横截面的位置，则由图 2－22（b）可知，该梁段的剪力与弯矩方程分别为

$$F_{s1}=F_{Ay}=\frac{bF}{l}\quad(0<x_1<a) \tag{2-6}$$

$$M_1=F_{Ay}x_1=\frac{bF}{l}x_1\quad(0\leqslant x_1\leqslant a) \tag{2-7}$$

对于 CB 段，为计算简单，以 B 点为原点，并用坐标 x_2 表示横截面的位置，则由图 2－22c 可知，该梁段的剪力与弯矩方程分别为

$$F_{s2}=-F_{By}=-\frac{aF}{l}\quad(0<x_2<b) \tag{2-8}$$

$$M_2=F_{By}x_2=\frac{aF}{l}x_2\quad(0\leqslant x_2\leqslant b) \tag{2-9}$$

（3）画剪力图与弯矩图。

根据式（2－6）与式（2－8）画剪力图［见图 2－22（d）］；根据式（2－7）与式（2－9）画弯矩图［见图 2－22（e）］。

可以看出，横截面 C 的弯矩最大，其值为

$$M_{\max}=\frac{Fab}{l}$$

如果 $b>a$，则 AC 段的剪力最大，其值为

$$F_{s\max}=\frac{bF}{l}$$

由剪力图与弯矩图可以看出，在集中力作用处，其左、右两侧横截面的弯矩相同，而剪力则发生突变，突变方向与集中力方向一致，突变量等于该集中力的大小。

【例 2－9】如图 2－23（a）所示杆件 AB 受均布载荷 q 作用，试列出杆 AB 的剪力方程和弯矩方程，并作剪力图和弯矩图。

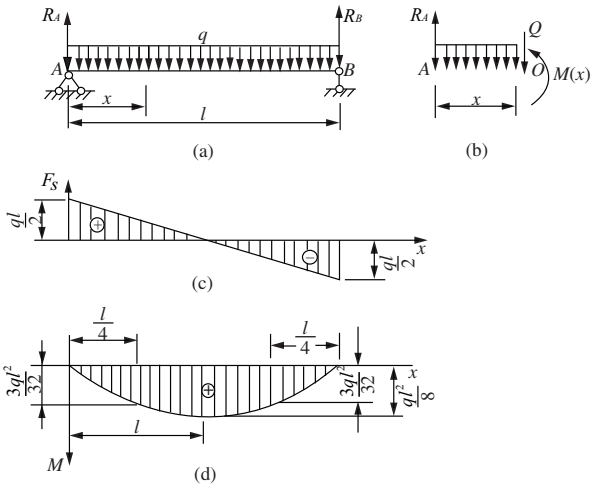


图 2－23

解：先求出支座反力

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}$$

以杆 AB 左端 A 为坐标原点，选取坐标系如图所示。距原点为 x 的任意横截面上的剪力 $F_S(x)$ 和弯矩可用简捷法取左侧来计算：

$$F_S(x) = R_A - qx = \frac{ql}{2} - qx \quad (0 < x < l) \tag{2-10}$$

$$M_x = R_A x - qx\ \frac{x}{2} = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \quad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{2-11}$$

由式（2-10）可以看出，剪力图是一条斜直线，只要确定其两点，就可定出这条斜直线，如图 2-23（c）所示。从式（2-11）可以看出弯矩图是一条抛物线，至少要确定曲线上的三个点的 M 值，才能画出这条曲线，如图 2-23（d）所示。

由剪力图和弯矩图可以看出，在支座内侧的横截面上剪力为最大值；而在跨度中点横截面上弯矩为最大值，分别为

$$|F_S|_{\max} = \frac{ql}{2}$$

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$$

【例 2-10】如图 2-24（a）所示简支梁受集中力偶 m 作用。试写出剪力方程和弯矩方程，并作出剪力图和弯矩图。

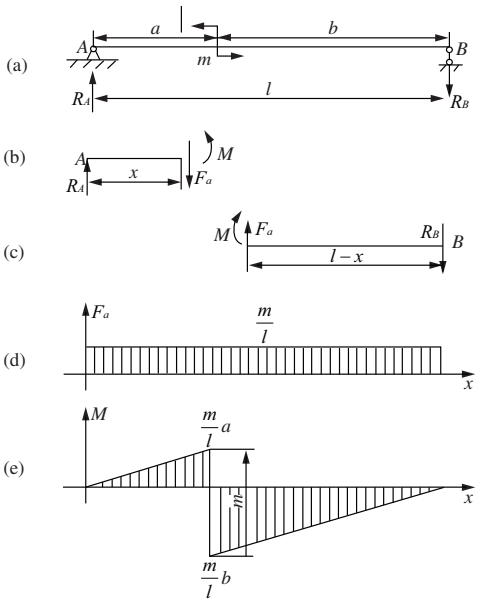


图 2-24

解：（1）求支座反力。

$$R_A = R_B = \frac{m}{l}$$

（2）建立剪力方程和弯矩方程。

对于 AC 段［见图 2－24（b）］$F_S=R_A=\frac{m}{l}$，$M=\frac{m}{l}x$（$0\leqslant x\leqslant a$）

对于 CB 段［见图 2－24（c）］$F_S=R_B=\frac{m}{l}$，$M=-R_B(l-x)=-\frac{m}{l}(l-x)$（$a\leqslant x\leqslant 1$）

（3）作剪力图和弯矩图。

剪力图和弯矩图分别如图 2－24（d）、（e）所示。$|F_S|_{max}=\frac{m}{l}$，发生在梁全长段；$|M|_{max}=\frac{b}{l}m$（设 $a<b$），发生在 C 处右侧。

从以上的例题可以看出，若将梁的弯矩方程对 x 取一阶导数，即得到剪力方程

$$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=F_S(x)$$

若将悬臂梁的剪力方程再对 x 取一阶导数即得分布载荷数值。

$$\frac{\mathrm{d}F_S(x)}{\mathrm{d}x}=q(x)$$

由此可以看出，载荷集度、剪力和弯矩存在一定的关系，这种关系也普遍存在于其他受力情况的梁。对于如图 2－25（a）所示的承简支梁，在距坐标原点为 x 和 $x+\mathrm{d}x$ 的两处以两个横截面切取微段 $\mathrm{d}x$［见图 2－25（b）］，并规定梁上分布载荷的方向与 y 轴方向一致为正。今设在 x 处的横截面上有剪力 $F_S(x)$ 和弯矩 $M(x)$，当 x 有一定增量 $\mathrm{d}x$ 时，相应的剪力和弯矩增量为 $\mathrm{d}F_S(x)$ 和 $\mathrm{d}M(x)$，在 $x+\mathrm{d}x$ 处横截面上的剪力和弯矩，即为 $F_S(x)+\mathrm{d}F_S(x)$ 和 $M(x)+\mathrm{d}M(x)$，现列出所取微段的平衡方程，得

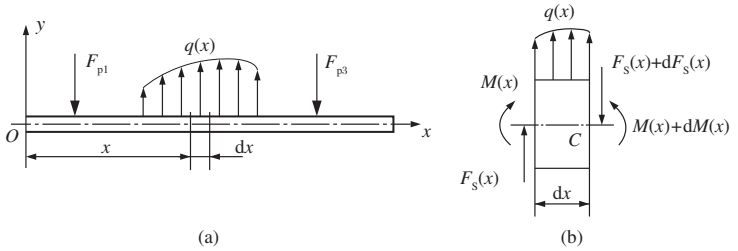


图 2－25

$$\sum F_x=0 \quad F_S(x)-[F_S(x)+\mathrm{d}F_S(x)]-q(x)\mathrm{d}x=0$$

$$\sum M_C=0 \quad -M(x)+[M(x)+\mathrm{d}M(x)]-F_S(x)\,\mathrm{d}x-q(x)\,\mathrm{d}x\cdot\frac{\mathrm{d}x}{2}=0$$

整理以上两式，略去二阶微量 $q(x)\,\mathrm{d}x\cdot\frac{\mathrm{d}x}{2}$，得

$$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=F_S(x) \tag{2-12}$$

$$\frac{\mathrm{d}F_S(x)}{\mathrm{d}x}=q(x) \tag{2-13}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}M^2(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}F_S(x)}{\mathrm{d}x}=q(x) \tag{2-14}$$

以上导出的载荷集度、剪力和弯矩之间的关系式表明：剪力图上某点处的斜率等于所对应横截面处的载荷集度；弯矩图上某点处的斜率等于所对应横截面处的剪力；弯矩图上某点处的二阶导数等于所对应横截面处的载荷集度。

由以上关系式的进一步推理，还可得出载荷集度、剪力图和弯矩图之间相对应的规律，这些规律对绘制或校核剪力图和弯矩图是很有意义的，这些规律是：

（1）在无分布载荷作用的梁段，因$\frac{\mathrm{d}F_S(x)}{\mathrm{d}x}=q(x)=0$，即$F_S(x)=$常量，故可知剪力图为平行于$x$轴的水平线。进而由$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=F_S(x)=$常量，故可知$M(x)$是$x$的一次函数，弯矩图为斜直线，其斜率由所对应的剪力图的剪力值而定。由此可见，**在无分布载荷作用的梁段，所对应的剪力图为平行于 *x* 轴的直线，弯矩图一定为斜直线。**

（2）在有均布载荷作用的梁段，因$q(x)=$常量，由$\frac{\mathrm{d}M^2(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}F_S(x)}{\mathrm{d}x}=q(x)=$常量，可知在这一段梁内$F_S(x)$是$x$的一次函数，$M(x)$是$x$的二次函数，即**剪力图为斜直线，弯矩图为抛物线**。若分布载荷向下，即$q(x)<0$，则弯矩图应为向上凸的曲线；反之，若分布载荷向上，即$q(x)>0$，则弯矩图应为向上凹的曲线。如在梁的某一横截面处，若$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=F_S(x)=0$，则在**此横截面上弯矩有极大值或极小值**。

（3）在集中力作用处，剪力图有突然变化，突变方向与集中力方向相同，突变值等于该处集中力的大小，而弯矩图则在该处发生转折。

（4）在集中力偶作用处，弯矩图有突然变化，其突变值等于该处集中力偶的力偶矩大小，而剪力图则在该处无变化，表明集中力偶作用的横截面的两侧弯矩图斜率相同。

在明确了以上这些规律后，即可不列梁的剪力方程和弯矩方程，而很简捷地画出剪力图和弯矩图。下面举例说明。

【例 2－11】图 2－26 为一外伸梁，梁上作用的荷载如图所示。试利用荷载集度、剪力和弯矩间的微分关系作梁的剪力图、弯矩图，并确定剪力和弯矩绝对值的最大值。

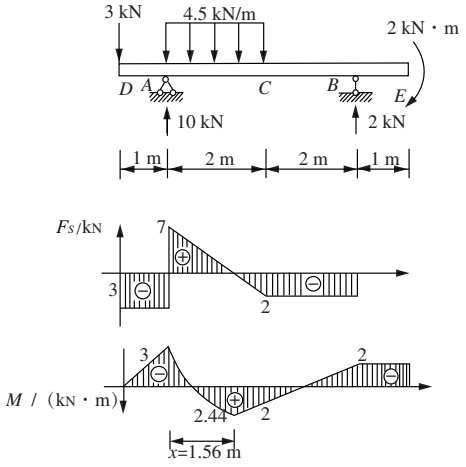


图 2－26

解：（1）确定支座反力。

根据梁的整体平衡，由

$$\sum M_A(\bar{F}) = 0, \sum M_B(\bar{F}) = 0$$

可以求得 A、B 处的支座反力

$$F_A = 10\ \text{kN}, F_B = 2\ \text{kN}$$

（2）确定控制面及控制面上的剪力和弯矩值。

根据梁上的荷载分布，A、B、C、D、E 截面都是控制面。应用截面法和平衡方程求得 A、B、C、D、E 五个控制面上的剪力和弯矩值分别为

A 截面　$F_S^- = -3\ \text{kN}$，$F_S^+ = 7\text{kN}$，$M = -3\ \text{kN}\cdot\text{m}$

B 截面　$F_S^- = -2\ \text{kN}$，$F_S^+ = 0$，$M = -2\ \text{kN}\cdot\text{m}$

C 截面　$F_S = -2\ kN$，$\text{M} = 2\ kN\cdot m$

D 截面　$F_S^+ = -3\ \text{kN}$，$M = 0$

E 截面　$F_S^- = 0$，$M = -2\ \text{kN}$

（3）根据微分关系连图线。

对于剪力图：在 DA 段没有均布荷载作用，剪力图为一水平直线，于是连接 D、A 两点；在 AC 段有均布荷载作用，剪力图为一斜直线，于是连接 A、C 两点；同理 CB、BE 段没有均布荷载作用，剪力图为一水平直线，分别连接端点即为梁的剪力图。

对于弯矩图：在 DA 段没有均布荷载作用，弯矩图为一斜直线，于是连接 D、A 两点即为这一段的弯矩图；在 AC 段有均布荷载作用，剪力图为一斜直线，弯矩因为二次抛物线。又因为当 q 指向下方，弯矩图将凹向上，于是 AC 段内弯矩图的形状大致可以确定。为了确定曲线的位置，除了 AC 段两个控制面上的弯矩数值外，还需确定在这一段内二次抛物线有没有极值点，以及极值点的位置和极值点弯矩数值。从剪力图上可以得到剪力为零的点的位置，该位置对应弯矩极值，根据

$$\frac{7}{x} = \frac{2}{2-x}$$

可得

$$x = 1.56\ \text{m}$$

由此求得该点的弯矩值为

$$M = 2.44\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

根据 AC 段两个控制面及剪力为零的点上的弯矩数值，可以画出 AC 段的弯矩图；CB 段没有均布荷载作用，弯矩图为一斜直线，分别连接端点即可；BE 段剪力为零，弯矩图为一水平直线，连接 B、E 端点的弯矩值，就得到整个梁的弯矩图。

从图中可以看出剪力和弯矩绝对值的最大值为

$$|F_S|_{\max} = 7\ \text{kN}$$

$$|M|_{\max} = 3\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

注意，在 D、A、B 点，由于有集中力和支座反力的作用，这些点的剪力图有突变，弯矩值出现折角。在点 E 处由于集中力偶的作用，弯矩值有突变。

【例 2-12】一外伸梁如图 2-27（a）所示，已知 $q = 4\ \text{kN/m}$，$F = 16\ \text{kN}$，$l = 4\ \text{m}$，试画出梁的剪力图、弯矩图。

解：（1）求支座约束力。

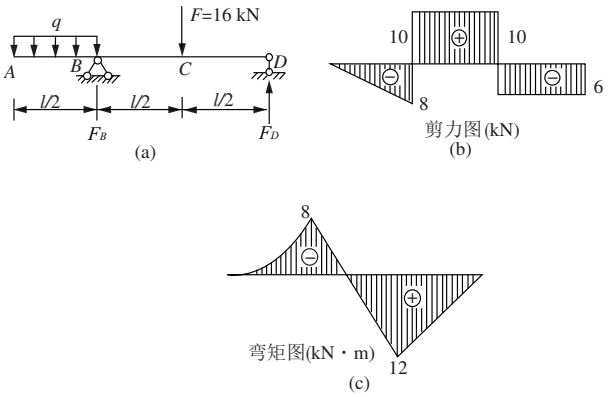


图 2－27

$$F_B=18\ \text{kN},\ F_D=6\ \text{kN}$$

（2）根据梁上的外力情况，将梁分为 AB、BC、CD 三段。

（3）画剪力图。AB 段上有向下的均布荷载，其剪力图为下斜直线，由

$$F_{SA}=0,\ F_{SB}{}^{-}=-\frac{1}{2}ql=-8\ \text{kN}$$

可画出该梁段的剪力图。

BC 段和 CD 段均无分布荷载作用，其剪力图均为水平线，由

$$F_{SB}{}^{+}=-\frac{1}{2}ql+F_A=10\ \text{kN}$$

$$F_{SC}{}^{+}=-F_D=-6\ \text{kN}$$

可分别画出 BC、CD 段的剪力图。梁的剪力图如图 2－27（b）所示。

（4）画弯矩图。AB 段梁上有向下的均布荷载，其弯矩图为下凸的二次抛物线，由 F_{SA} 可知，在 A 截面上弯矩取极值，由

$$M_A=0,\ M_B=-\frac{1}{2}ql\cdot\frac{1}{4}l=-8\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

可画出 AB 段的弯矩图。

BC、CD 段均无荷载作用，其弯矩图均为斜直线，由

$$M_B=-8\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_C=F_D\cdot\frac{1}{2}l=12\ \text{kN}\cdot\text{m},\ M_D=0$$

可画出 BC、CD 段的弯矩图。梁的弯矩图如图 2－27（c）所示。

思考题

（1）轴力越大，杆件越容易被拉断，因此轴力的大小可以用来判断杆件的强度。上述说法对吗？为什么？

（2）在什么情况下杆件产生拉伸或压缩变形？图 2－28 中哪些是属于轴向拉伸或轴向压缩？

（3）图 2－29 传动轴中主动轮 A 的输入功率为 10 kW，从动轮轮 B 和 C 的输出功率均

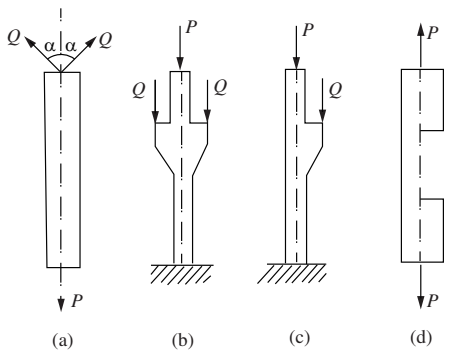


图 2－28

为 5kW，则在三种轮子布局中最合理的是哪一个？为什么？

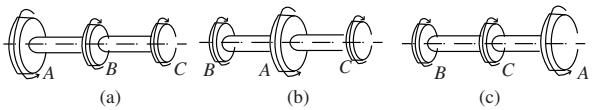


图 2－29

(4) 在写剪力、弯矩方程时，试问对梁怎样分段？

(5) 试问在建立剪力、弯矩方程时，坐标原点的选取是否一定选在梁的左端？当原点选取位置不同时，由剪力、弯矩方程绘出的剪力和弯矩图是否一致？

(6) 在有集中力作用处，梁的剪力图要发生突变，弯矩图的斜率也要发生突变吗？

(7) 如何确定最大弯矩？最大弯矩是否一定发生在剪力为零的横截面上？

(8) 在无载荷作用与均布载荷作用的梁段，剪力图与弯矩图各有何特点？如何利用这些特点绘制剪力与弯矩图？

(9) 如图 2－30 所；示外伸梁承受均布载荷 q 作用。试问当 a 为何值时，梁的最大弯矩值最小。

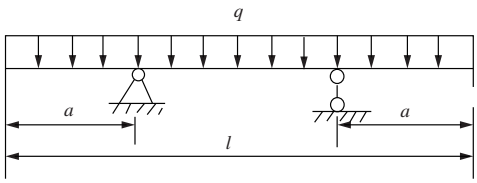


图 2－30

(10) 试作如图 2－31 所示梁的剪力图和弯矩图。梁在 CD 段的变形称为纯弯曲，在 AC、DB 段的变形称为横力弯曲。试问纯弯曲有何特征？横力弯曲有何特征？

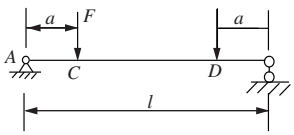


图 2－31

(11) 如图 2－32 所示简支梁的 $m-m$ 截面，如用截面左侧的外力计算剪力和弯矩，则 F_S 和 M 便与 q 无关；如用截面右侧的外力计算剪力和弯矩，则 F_S 和 M 便与 F 无关。这样的论断正

确吗？为什么？

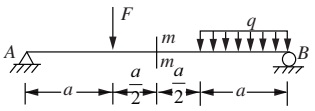


图 2－32

（12）下列关于轴力的几种说法，正确的是 _____。

A. 轴力是作用于杆件轴线上的载荷

B. 轴力是轴向拉伸或压缩时，杆件横截面上分布内力系的合力

C. 轴力的大小与杆件的横截面面积有关

D. 轴力的大小与杆件的材料有关

（13）设一阶梯形杆的轴力沿杆轴是变化的，则发生破坏的截面上_____。

A. 外力一定最大，且面积一定最小

B. 轴力一定最大，且面积一定最小

C. 轴力不一定最大，但面积一定最小

D. 轴力与面积之比一定最大

（14）在弯曲和扭转变形中，外力偶矩的矢量方向分别与杆的轴线 _____。

A. 垂直、平行　　B. 垂直、垂直

C. 平行、垂直　　D. 平行、平行

（15）梁在集中力作用的截面处，则_____。

A. 剪力图有突变，弯矩图光滑连续

B. 剪力图有突变，弯矩图有折角

C. 弯矩图有突变，剪力图光滑连续

D. 弯矩图有突变，剪力图有折角

（16）梁在集中力偶作用截面处，则 _____。

A. 剪力图有突变，弯矩图无变化

B. 剪力图有突变，弯矩图有折角

C. 弯矩图有突变，剪力图无变化

D. 弯矩图有突变，剪力图有折角

（17）梁在某截面处 $F_S=0$，则该截面处弯矩有_____。

A. 极值　　B. 最大值

C. 最小值　　D. 零值

（18）关于平面弯曲，下列结论中正确的是 _____。

A. 当载荷作用在梁的纵向对称平面内时，该梁产生平面弯曲

B. 若要使梁产生平面弯曲，则梁的横截面至少具有一个对称轴

C. 梁产生平面弯曲时，梁的轴线必变形成载荷作用平面内的平面曲线

D. 当梁的横截面为任意无对称轴的平面时，该梁不可能产生平面弯曲

习题

（1）试求如图 2－33 所示结构中 1、2、3 各杆的轴力。

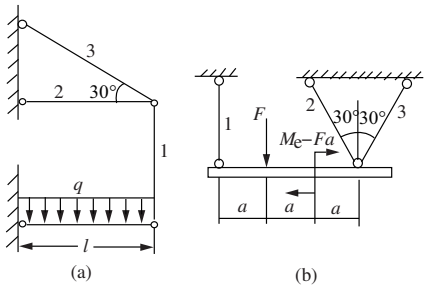


图 2－33

（2）试求如图 2－34 所示各横截面 1－1、2－2 和 3－3 上的轴力，并作出轴力图。

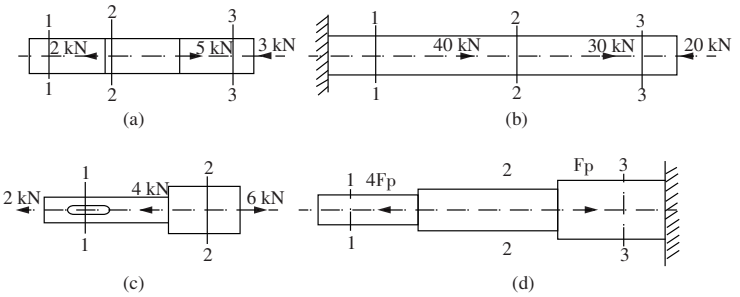
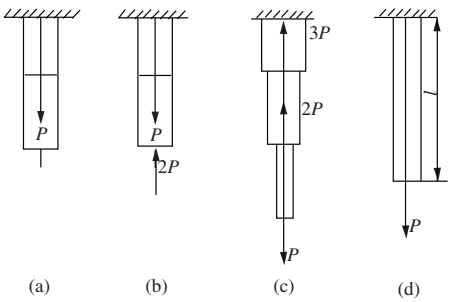


图 2－34

（3）试求如图 2－35 作图示各杆的轴力图。考虑杆的自重，横截面面积为 A，容重为 V。



题 2－35

（4）如图 2－36 所示某传动轴，转速 $n=300$ r/min，轮 1 为主动轮，输入功率 $P_1=50$ kW，轮 2、轮 3 与轮 4 为从动轮，输出功率分别为 $P_2=10$ kW，$P_3=P_4=20$ kW。

①试画轴的扭矩图，并求轴的最大扭矩；

②若将轮 1 与轮 3 的位置对调，轴的最大扭矩变为何值，对轴的受力是否有利。

（5）试画出如图 2－37 所示各圆轴的扭矩图，并指出各轴的最大扭矩值。

（6）试建立如图 2－38 所示各梁的剪力方程与弯矩方程，并画剪力图与弯矩图。

（7）如图 2－39 所示的各梁，试利用剪力、弯矩与载荷集度间的关系画出剪力图与弯

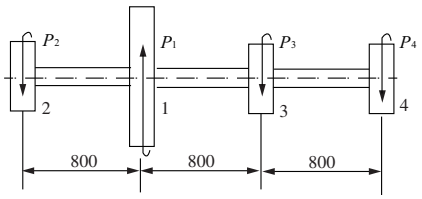


图 2－36

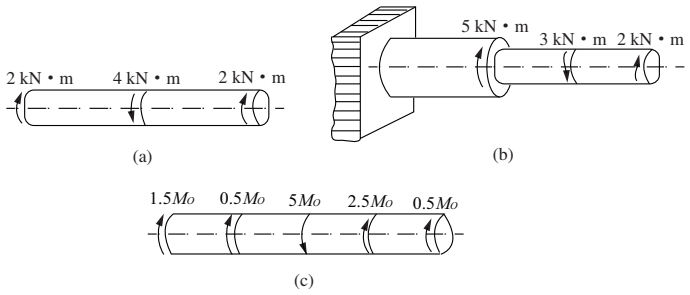


图 2－37

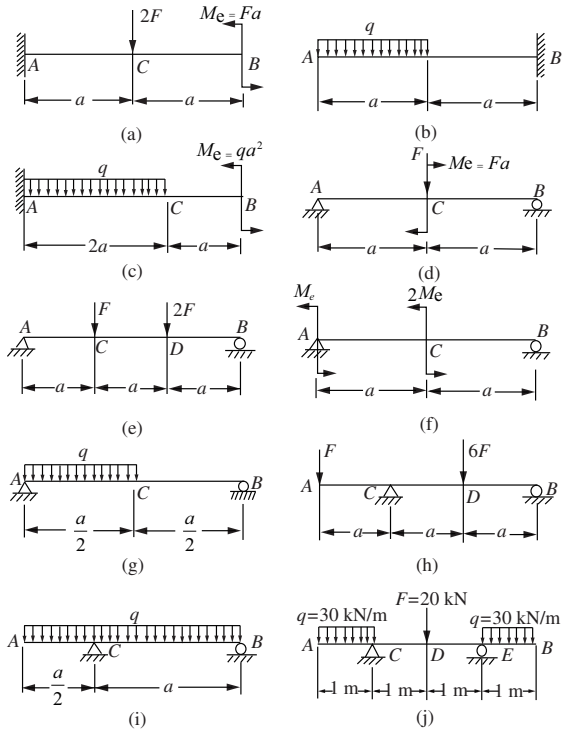


图 2－38

矩图，并求最大剪力与最大弯矩值。

（8）试求如图 2－40 所示各梁中指定截面上的剪力和弯矩。

（9）改正图 2－41 中剪力图和弯矩图的错误。

（10）设梁的剪力图如图 2－42 所示，试作梁的弯矩图和载荷图。已知梁上没有集中力偶作用。

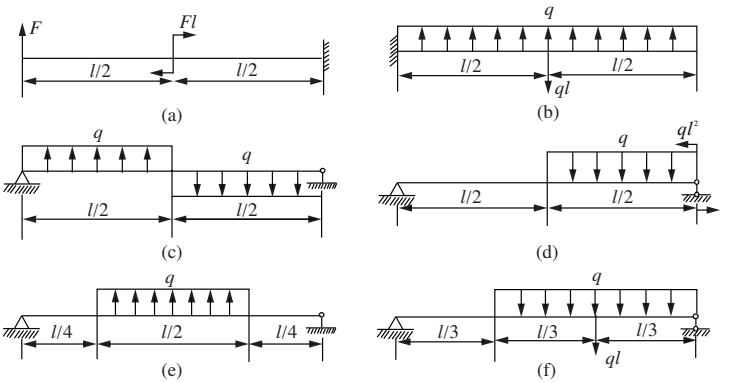


图 2－39

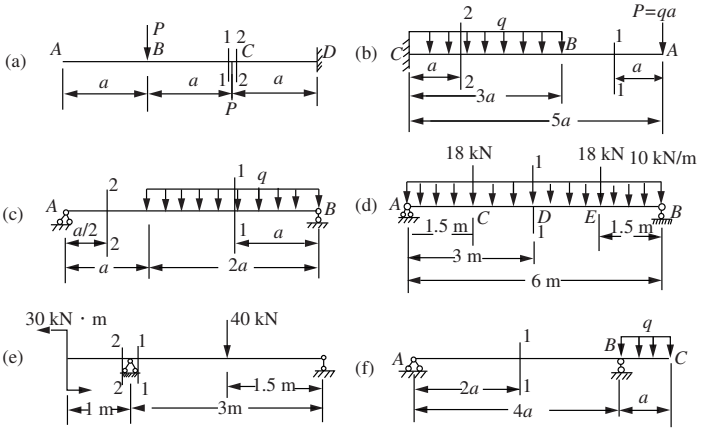


图 2－40

（11）已知梁的弯矩图如图 2－43 所示，试作梁的载荷图和剪力图。

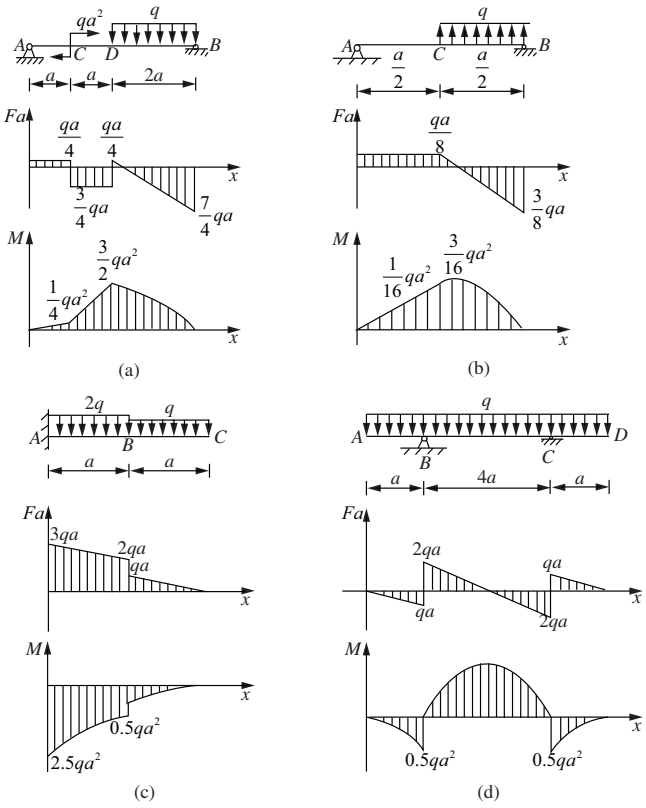


图 2－41

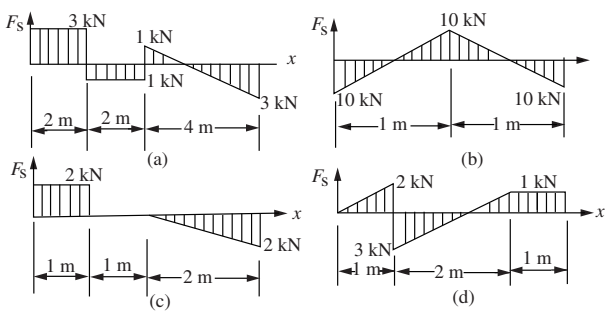


图 2－42 图

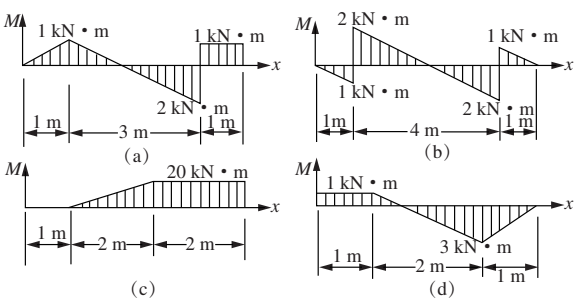


图 2－43